

平成28年度 学部前期

解析力学及び演習(Aクラス) ハミルトンの原理

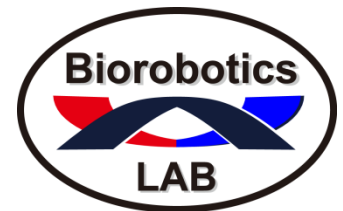
教科書: 力学Ⅱ (原島 鮮 著, 裳華房)

金用日: 8限, 9限, 10限 (15:35~18:00)

丸山 央峰



<http://www.biorobotics.mech.nagoya-u.ac.jp/>



宿題(14章問題1)

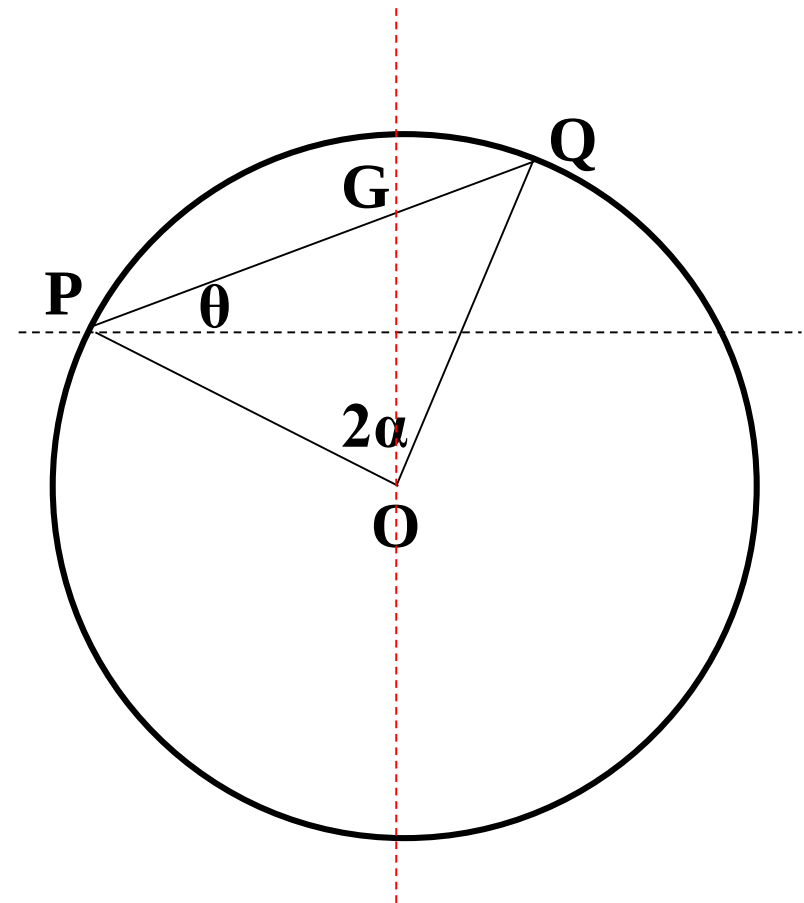
問題1 鉛直面内にある滑らかな円形の輪に2つの小さな環が通してあって、これらの環は円輪の直径よりも短い糸で結ばれている。両方の環と円輪の中心とを結ぶ直線が 2α の角をつくっているとして、つりあいの位置での糸が水平とつくる角 θ を求めよ。

つり合いの条件

$$\delta U = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta_k} = 0 (k = 1, 2, \dots, f)$$

位置エネルギー

$$U = Pa \cos(\alpha + \theta) + Qa \cos(\alpha - \theta)$$



宿題(14章問題1)

問題1 鉛直面内にある滑らかな円形の輪に2つの小さな環が通してあって、これらの環は円輪の直径よりも短い糸で結ばれている。両方の環と円輪の中心とを結ぶ直線が 2α の角をつくっているとして、つりあいの位置での糸が水平とつくる角 θ を求めよ。

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_k} = 0 \text{ より } \frac{\partial U}{\partial \theta} = -Pa \sin(\alpha + \theta) + Qa \sin(\alpha - \theta) = 0$$

$$-P(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) + Q(\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) = 0$$

$$-P \tan \alpha - P \tan \theta + Q \tan \alpha - Q \tan \theta = 0$$

$$\tan \theta = \frac{Q - P}{P + Q} \tan \alpha$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{Q - P}{P + Q} \tan \alpha \right)$$



宿題(14章問題3)

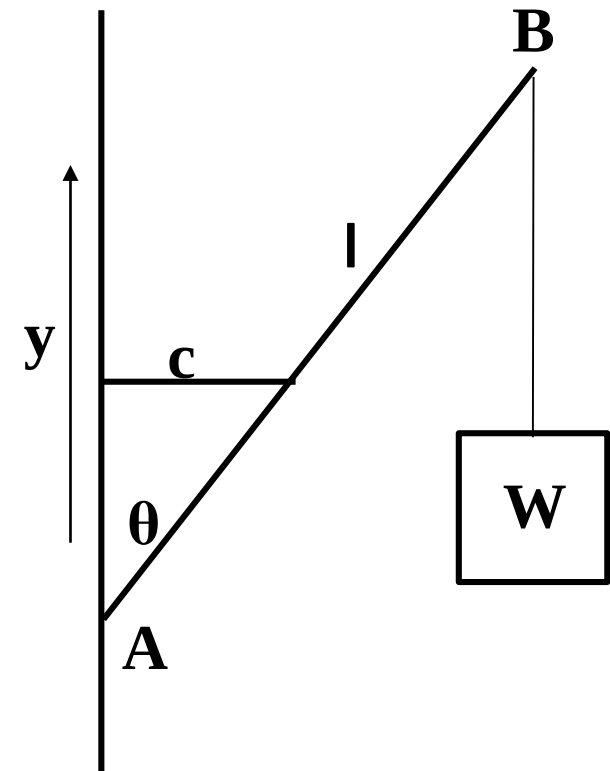
問題3 重さの無い棒(長さ= l)の下端を鉛直な滑らかな壁につけ, これを壁から c の距離にある滑らかな釘にかけ, 上の端に重さ W のおもりを吊るす. つりあいの状態での棒と鉛直のつくる角をもとめよ.

※この系の重心の高さの変化はB点の高さの変化と同じである.

$$y = \left(l - \frac{c}{\sin \theta} \right) \cos \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = -l \sin \theta + c \frac{1}{\sin^2 \theta} = 0$$

$$\sin^3 \theta = \frac{c}{l}$$



宿題(16章問題3)

問題3 ダランベールの原理を使って各項を考えよ

$$\sum \{ (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i \} = 0$$

(a) 各質点に対して共通な仮想変位として, $\delta x = a$, $\delta y = b$, $\delta z = c$ を与えて運動量に対する法則を導け.

$$a \sum (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + b \sum (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + c \sum (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i = 0$$



宿題(16章問題3)

問題3 ダランベールの原理を使って各項を考えよ

$$\sum \{(X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i\} = 0$$

(b) 仮想変位として, 全体系をz軸まわりに $\delta\theta$ だけ回すことを考えて, 角運動量に対する法則を導け.

$$x_i = r_i \cos \theta, y_i = r_i \sin \theta, z_i = z_i$$

$$\delta x_i = -r_i \sin \theta \delta \theta = -y_i \delta \theta,$$

$$\delta y_i = r_i \cos \theta \delta \theta = x_i \delta \theta$$

$$\delta z_i = 0$$

$$\delta \theta \sum \{(X_i - m_i \ddot{x}_i)(-y_i) + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)(x_i) + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \times 0\} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \sum \{m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)\} = \sum (-y_i X_i + x_i Y_i)$$



宿題(16章問題5)

問題5 線密度 σ の糸を張力 S で張るときの糸を伝わる波の運動を決める基礎の方程式を導け

弦に沿って x , これに垂直な変位 y を与えると, 張力は保存力であるので

$$\sum \{m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i)\} = -dU \quad \longrightarrow \quad \sum \{m_i \ddot{y}_i \delta y_i\} = -dU$$

自由度 ∞ の質点系と考える

弦の長さを l , 線密度を σ と考えると

$$\int_0^l m_i \ddot{y}_i \delta y_i dx = -\delta U$$

張力による自由エネルギーは

$$U = \int_0^l \left(\frac{1}{2} S \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

位置エネルギーの変分は

$$\delta U = S \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right) dx = S \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) \right) dx = S \left[\frac{\partial y}{\partial x} \delta y \right]_0^l - S \int_0^l \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^2} \delta y \right) dx = -S \int_0^l \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^2} \delta y \right) dx$$



宿題(16章問題5)

問題5 線密度 σ の糸を張力 S で張るときの糸を伝わる波の運動を決める基礎の方程式を導け

したがって,

$$\int_0^l \left(\sigma \frac{d^2 y}{dt^2} - S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y dx = 0$$

$$\sigma \frac{d^2 y}{dt^2} - S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$



17. Hamiltonの原理 (17.1 Hamiltonの原理)

ダランベールの方程より

$$\sum \{ (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i \} = 0$$

慣性抵抗の項をr, 加えられた力の項をUで表して「一般化」したい.
→座標系に依存しない形にする.

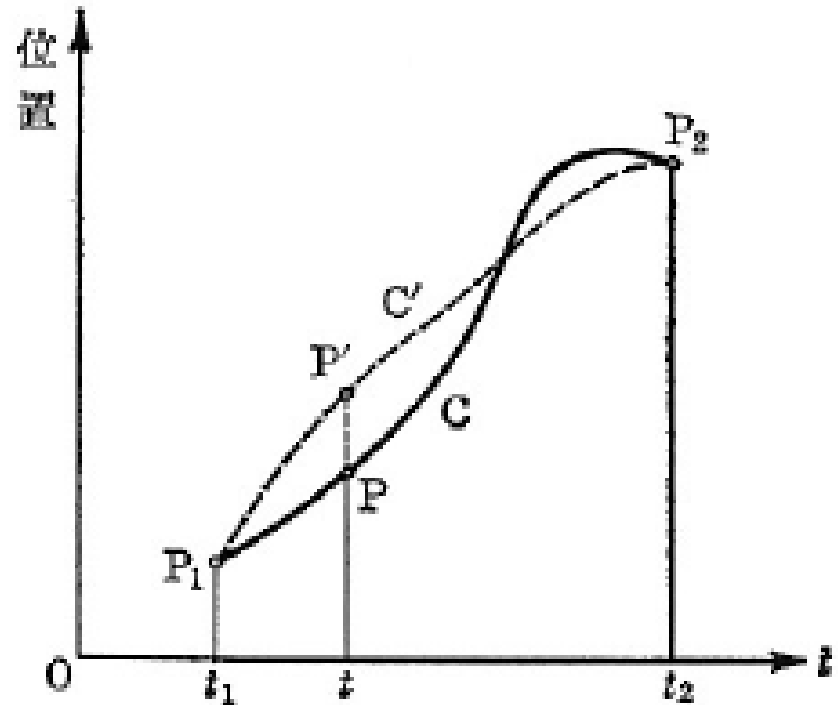
Hamiltonの原理

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = 0$$

もしくは

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, L = T - U$$

Lagrangian (運動ポテンシャル)



17.1 - 1 図

17. Hamiltonの原理 (17.1 Hamiltonの原理)

導出手順

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} (T' - T) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt$$

$$\delta \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta x_i), \delta \left(\frac{dy_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta y_i), \delta \left(\frac{dz_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta z_i)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left\{ \sum \frac{m_i}{2} (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i (u_i \delta u_i + v_i \delta v_i + w_i \delta w_i) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i \left(u_i \frac{d}{dt} (\delta x_i) + v_i \frac{d}{dt} (\delta y_i) + w_i \frac{d}{dt} (\delta z_i) \right) dt$$

$$= \left[\sum m_i (u_i \delta x_i + v_i \delta y_i + w_i \delta z_i) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i (\dot{u}_i \delta x_i + \dot{v}_i \delta y_i + \dot{w}_i \delta z_i) dt$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i (\dot{u}_i \delta x_i + \dot{v}_i \delta y_i + \dot{w}_i \delta z_i) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) dt$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt$$



17. Hamiltonの原理 (17.1 Hamiltonの原理)

Hamiltonの原理

質点系が t_1 という時刻にとる位置から t_2 という時刻にとる位置に移るのに、その途中で束縛条件にあうような移し方がいろいろあるうち、**経路の関数である運動ポテンシャル(運動エネルギー－位置エネルギー)**を同じ時間内で積分したものが極小(もしくは極大)になるような運動の仕方が実際に起きる運動である。

※移し方の経路の変化を示すパラメータの微分係数が零になる。

※この原理が「実際に起こる運動」の必要十分条件であることの直接的な証明はないが、「つり合い」の必要十分条件である仮想仕事の原理を「実際に起こる運動」に拡張したものであることはいえる。

利点

1. 式が一つで済む。
2. 一般的な座標を扱うことができる。



17. Hamiltonの原理 (17.1 Hamiltonの原理)

落体の運動

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad L = \frac{m}{2} \dot{y}^2 - mgy$$

§ 15.1において、 $f \rightarrow L$, $x \rightarrow t$ とすると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

したがって

$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) + mg = 0$$

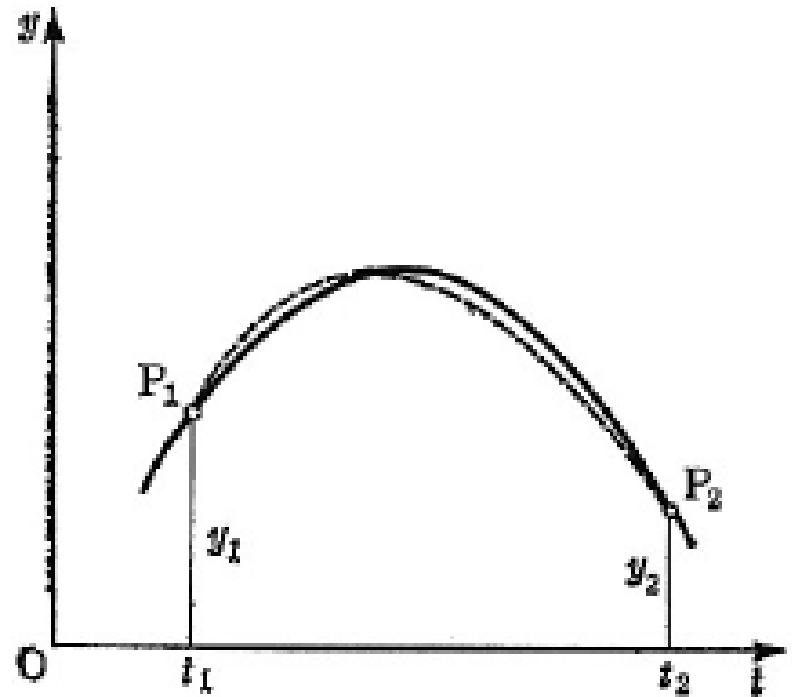
これを初期値問題ではなく
次の2点境界値問題として解くと

$$\frac{d}{dt} (\dot{y}) = -g, \quad \dot{y} = -gt + C$$

$$y = -\frac{g}{2} t^2 + Ct + D$$

$$t=t_1, t_2 \text{ で } y=0$$

$$y = -\frac{g}{2} (t - t_1)(t - t_2)$$



17.1-2 図



17. Hamiltonの原理 (17.1 Hamiltonの原理)

ここでは、落体の運動

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad L = \frac{m}{2} \dot{y}^2 - mgy$$

をHamiltonの原理で直接的に解く。
境界条件を満足する近似解を次の
ようにおく。

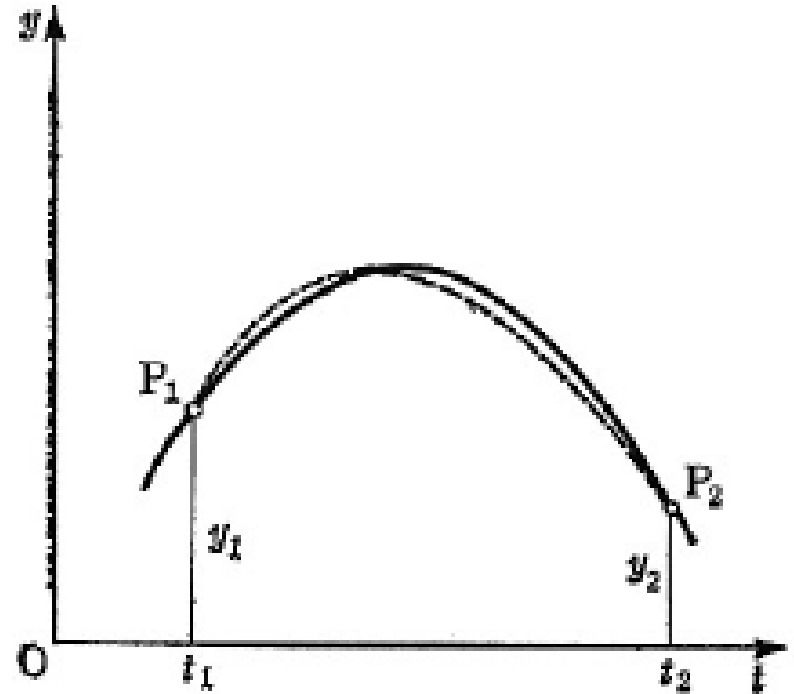
$$y = C(t - t_1)(t - t_2)$$

これをLに代入し、微分・積分を実行
すると、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2} \dot{y}^2 - mgy \right) dt =$$

$$= \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{y}^2) dt - mg \int_{t_1}^{t_2} (y) dt = \frac{m}{6} (t_2 - t_1)^3 (C^2 + gC)$$

Sを最小にするCを求める. $\frac{dS}{dC} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{g}{2}$



17.1-2 図



17. Hamiltonの原理 (17.1 Hamiltonの原理)

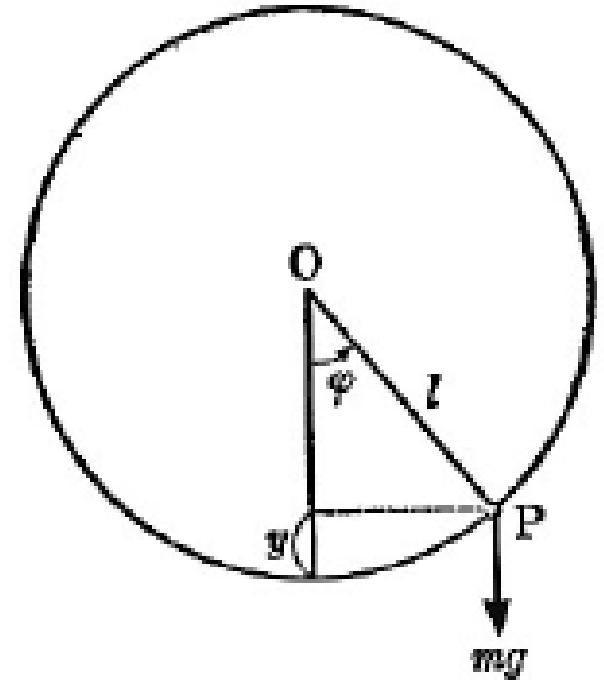
例題1 単振り子の振動

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (l \dot{\varphi})^2 - mgl(1 - \cos \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\varphi}) + mgl \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$



17.1-3 図

φが小さい場合は単振動

大きい場合は楕円関数になります.

17. Hamiltonの原理(17.2最小作用の原理)

最小作用の原理

質点系が保存力の作用を受けている場合、最初の位置から最後の位置に移る道筋で束縛条件に適うものの内、力学的エネルギーがいろいろな道筋を考えると、自然に起こる運動、すなわち運動の法則を満足する運動は

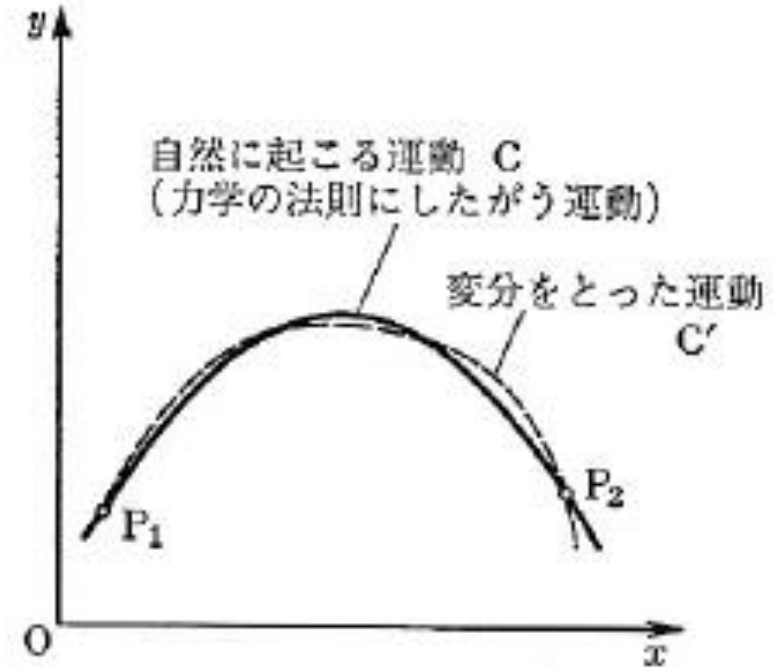
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0$$

に停留値をとらせるものである。

$$T + U = E = \text{const}$$

$$L = T - U = T - (E - T) = 2T - E$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0$$



17.2-1 図

17. Hamiltonの原理(17.2最小作用の原理)

誘導

時間: $t' = t + \delta t, dt' = dt + d(\delta t)$

速度: $\delta \dot{x}_i = \delta \left(\frac{dx_i}{dt} \right) \equiv \frac{dx_i'}{dt'} - \frac{dx_i}{dt} = -\dot{x}_i \frac{d(\delta t)}{dt} + \frac{d}{dt}(\delta x_i)$

運動エネルギー

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2'} T' dt' - \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[(T + \delta T) \left\{ 1 + \frac{d(\delta t)}{dt} \right\} - T \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} T d(\delta t) + \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt$$

ここで $T' = T + \delta T, dt' = \frac{dt'}{dt} dt = \left\{ 1 + \frac{d(\delta t)}{dt} \right\} dt, -\delta U = \delta T$

一方, 教科書(17. 2-3)より

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = - \int_{t_1}^{t_2} 2T d(\delta t) - \int_{t_1}^{t_2} \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) dt = - \int_{t_1}^{t_2} 2T d(\delta t) - \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt$$

上式を代入して $\delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0$



17. Hamiltonの原理(17.2最小作用の原理)

運動エネルギー

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right\} = E - U$$

$$dt = \sqrt{\frac{\sum m_i \{ (dx_i)^2 + (dy_i)^2 + (dz_i)^2 \}}{2(E - U)}}$$

最小作用の原理に代入して $\delta \int \sqrt{2(E - U)} \sqrt{\sum m_i \{ (dx_i)^2 + (dy_i)^2 + (dz_i)^2 \}} = 0$

1個の質点の場合, 質量は一定なので

$$\delta \int \sqrt{2(E - U(x, y, z))} ds = 0, ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

一方, 幾何光学では, フェルマーの定理がある

※光は時間が最小になる経路を進む.



17. Hamiltonの原理(17.3測地線)

測地線: 質点が他から力を受けないで滑らかな静止した曲面上を運動するときの軌跡

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0$$

質点の速さ, すなわち運動エネルギーが一定なので,

$$\delta(t_2 - t_1) = 0$$

所要時間が極地, したがって, 道筋の長さが極地をとる.

測地線の例

平面上: 直線	教科書15pの例題1
円柱状: 展開した時に直線	教科書15pの例題2
球面上: 大円	

